

L'alfabeto della natura

Le equazioni
che governano il mondo

di Carlo Bernardini



Il mondo attorno a noi è fatto di noi stessi e dell'ambiente in cui viviamo, vicino e lontano, visibile e invisibile. Nell'ambiente ci sono oggetti e fenomeni che si svolgono nel tempo e ce ne danno la percezione. Tutto questo sembra evolvere seguendo regole precise che, sin dall'antichità chiamiamo "leggi di natura", benché, con la meccanica quantistica, anche il "caso" sembra essere entrato nel novero dei motori del cambiamento, accanto ai rapporti di causa ed effetto.

La descrizione degli eventi richiede una tecnica di registrazione che, come requisito generale minimo, ha bisogno di un sistema di riferimento spaziale, in tre dimensioni, più un insieme di orologi disseminati in tutto lo spazio e sincronizzati, e altri strumenti di misura. È diffuso l'uso di adottare, per lo spazio, una terna di assi cartesiani realizzati con l'incrocio di superfici piane rigide ortogonali, anche se questa non è la sola possibilità. Per il tempo, la misura si basava in passato sulla regolare scansione di fenomeni astronomici periodici, mentre oggi fa riferimento a oscillazioni atomiche. Ci sono poi strumenti che misurano la massa, l'elasticità dei corpi, la fluidità dei liquidi, le forze (spinte, attrazioni, ecc.), le frequenze e altre quantità, il che richiede l'adozione di un vasto sistema convenzionale di unità di misura per ciascun tipo di grandezza misurata.

Le leggi di natura sono espresse matematicamente da relazioni tra grandezze fisiche del tipo $A = B$ (equazioni di questo genere sono quasi tutte quelle discusse nelle prossime pagine) oppure $A > B$ (un'importante disuguaglianza è il *principio di indeterminazione* di Heisenberg, vd. p. 19). A e B sono combinazioni o funzioni di altre grandezze e, nel caso delle *leggi di evoluzione* (vd. approfondimento a p. 7), contengono delle *derivate*, cioè delle variazioni temporali e spaziali. Un principio universalmente valido che si applica a tutte le leggi è il *principio di omogeneità*: A e B devono avere le stesse unità di misura, il che significa che il loro rapporto deve essere un numero puro (questo principio, lungi dall'essere una banale astrazione, porta in certi casi a risultati concreti attraverso ragionamenti di scala, che rappresentano una generalizzazione della nozione geometrica di similitudine).

Il prototipo di tutte le leggi matematiche della natura è la *legge della gravitazione universale di Newton*. Questa legge afferma che la forza di gravità tra due corpi è proporzionale alle masse m e m' dei corpi e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza. In notazione moderna, la scriviamo come $F = Gmm'/r^2$, dove G è la costante di Newton. Combinata con l'equazione fondamentale della dinamica $F = ma$ (forza = massa per

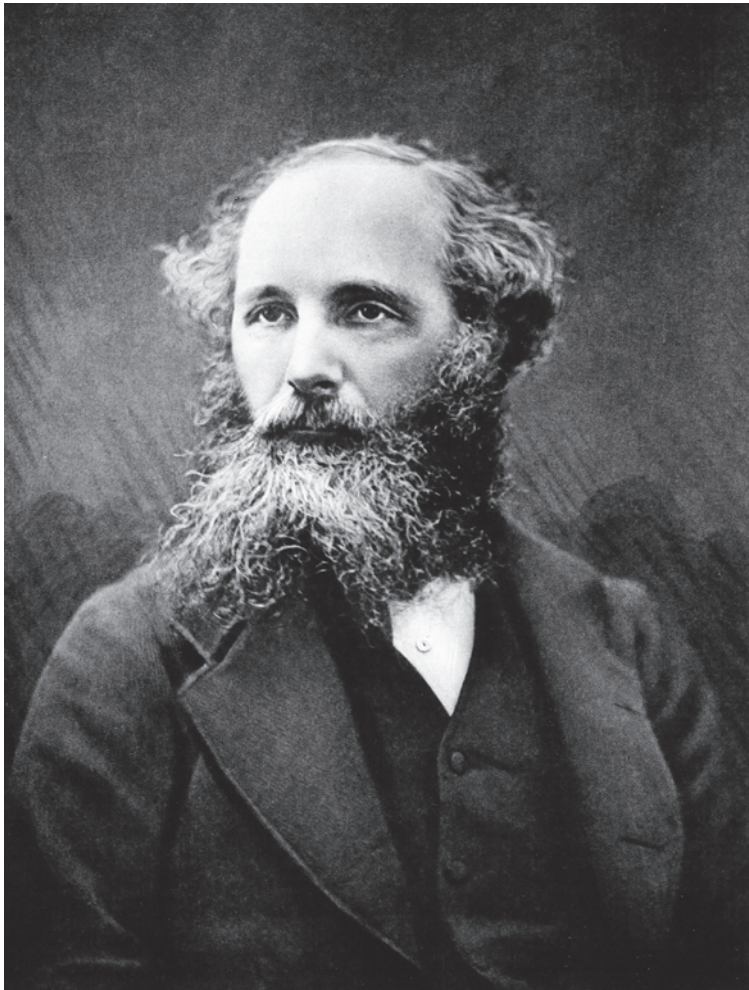


a.
La legge di gravitazione universale di Newton (il valore della costante di Newton G è pari a $6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$).

accelerazione), la legge newtoniana della gravità permette di calcolare con grande precisione i moti planetari e per secoli è stata alla base della meccanica celeste. Solo nel 1915 è stata soppiantata dalla legge della gravitazione di Einstein (l'equazione della relatività generale, vd. p. 29), che la incorpora come caso limite (valido quando il campo gravitazionale è debole e non modifica sensibilmente lo spaziotempo).

Affinché il primo e il secondo membro dell'equazione della gravità di Newton siano espressi entrambi nelle unità di misura della forza, in base al principio di omogeneità, è necessario che la costante G non sia un numero puro, ma abbia anch'essa delle opportune unità di misura. Infatti, se ponessimo G uguale a 1 (analogamente a quel che si fa in relatività, dove si pone la velocità della luce nel vuoto c uguale a 1, misurando le lunghezze in tempi-luce), dovremmo misurare le masse in metri e secondi, anziché in chilogrammi!

Fino all'inizio del XIX secolo, si riteneva che tutti i fenomeni fisici fossero riconducibili al moto di corpi materiali soggetti ad azioni a distanza (come la forza di gravità e altre forze modellate su questa). Le entità fondamentali erano quindi particelle, cioè oggetti localizzati la cui posizione spaziale è specificata da tre coordinate cartesiane funzioni del tempo, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Le equazioni della dinamica permettevano, una volta risolte, di determinare queste leggi temporali. Nel corso dell'800 emerse un'altra importantissima nozione, quella di *campo*, di cui siamo debitori soprattutto a James Clerk Maxwell. L'elettromagnetismo è una fisica di campi, cioè di entità diffuse nello spazio, rappresentate da funzioni del tipo $A(x,y,z,t)$, che dipendono dalle coordinate spaziali e dal tempo. I campi sono retti anch'essi da equazioni di evoluzione che permettono di prevedere la configurazione di un campo in un qualunque istante futuro, una volta che sia nota la sua configurazione nell'istante iniziale.



b.
Il padre della teoria
elettromagnetica, James Clerk
Maxwell.

Leggi ed equazioni per tutti i gusti



Sebbene siano tutte riconducibili a uguaglianze o disuguaglianze tra grandezze, del tipo $A = B$ e $A > B$, le leggi della natura sono molto diverse tra loro, sia per la matematica che coinvolgono, sia per il loro status fisico: esistono leggi universali e leggi di applicabilità limitata, leggi che permettono di predire l'evoluzione nel tempo dei sistemi e leggi che descrivono il mondo così com'è in un determinato istante. È impossibile classificare in maniera esauriente tutte le leggi fisiche, ma possiamo tentare di illustrarne alcuni tipi (vd. anche pp. 8, 9). L'equazione di Newton $F = ma$ combinata con la legge di gravitazione universale, le equazioni di Maxwell (vd. p. 12), l'equazione di Dirac (vd. p. 22) e l'equazione della relatività generale (vd. p. 29) sono esempi di leggi di evoluzione, leggi di grande generalità che governano un vasto numero di fenomeni. Da un punto di vista matematico, si tratta di equazioni differenziali, cioè di equazioni in cui compaiono le variazioni istantanee (le cosiddette derivate) di funzioni che descrivono lo stato di un sistema (la posizione e la velocità delle particelle in meccanica classica, i campi nell'elettromagnetismo, la funzione d'onda in meccanica quantistica). Per

risolvere le equazioni dinamiche, bisogna conoscere le condizioni iniziali, cioè lo stato del sistema in un istante iniziale. Queste condizioni sono in genere aleatorie e non soggette ad alcuna regolarità, ma determinano, assieme alle leggi di evoluzione, gli stati successivi del sistema.

La relazione tra energia e massa, il principio di indeterminazione di Heisenberg (vd. p. 19), la relazione tra energia e temperatura (vd. p. 32) e l'equazione di Boltzmann (vd. p. 36), sono esempi di leggi che possiamo chiamare leggi di stato, perché evidenziano delle connessioni stabili tra diverse proprietà di un sistema. In alcuni casi queste leggi convertono certe grandezze in altre: per esempio, $E = mc^2$ (o $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ nella sua forma più generale, vd. p. 16) converte masse in energie e viceversa, mentre le leggi della meccanica statistica ($E = kT$ e $S = k \log W$) convertono grandezze macroscopiche (la temperatura T e l'entropia S) in grandezze microscopiche (l'energia delle particelle E e il numero di stati microscopici W).

A differenza che nelle società democratiche, nella fisica c'è qualcosa che sta al di sopra delle leggi: sono i principi di simmetria, che svolgono il ruolo di

"superleggi". Come diceva il fisico teorico Eugene Wigner, "le simmetrie sono leggi che le leggi di natura devono rispettare". I principi di simmetria stabiliscono che le leggi di evoluzione devono essere invarianti rispetto a certe trasformazioni: per esempio, rispetto agli spostamenti spaziali e temporali, rispetto alle rotazioni, rispetto alle trasformazioni di Lorentz, che fanno passare da un sistema di riferimento a un altro (questo particolare principio di simmetria è chiamato principio di relatività) o rispetto ad alcune trasformazioni della funzione d'onda. Come dimostrò la matematica tedesca Emmy Noether nel 1918, le simmetrie hanno come necessaria conseguenza le leggi di conservazione, un'altra importante classe di leggi fisiche (vd. in Asimmetrie n. 11 p. 14, ndr). Queste leggi stabiliscono che nel corso dei fenomeni alcune grandezze – l'energia, la quantità di moto, il momento angolare, la carica elettrica, ecc. – non variano. Sono, forse, gli strumenti più utili e più comodi del fisico, perché permettono di ottenere informazioni sui processi per mezzo di una matematica elementare. [Vincenzo Barone]

Le leggi fondamentali della fisica sono leggi di evoluzione, che permettono di determinare lo stato di un sistema in ogni istante, una volta che sia noto il suo stato iniziale. Queste leggi sono soggette ai principi di simmetria, direttamente legati a loro volta alle leggi di conservazione: le simmetrie spazio-temporali corrispondono alla conservazione dell'energia, della quantità di moto e del momento angolare, mentre le simmetrie *di gauge* corrispondono alla conservazione delle varie "cariche" delle particelle, come ad esempio la carica elettrica. Le leggi di stato, infine, sono relazioni tra grandezze diverse che devono sempre valere per qualunque stato di sistema.

stato
iniziale



James Clerk Maxwell
(1831-1879)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}$$



Isaac Newton
(1642-1727)

$$F = G \frac{m m'}{r^2}$$

Albert Einstein
(1879-1955)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$



Ludwig Boltzmann
(1844-1906)

$$E = kT$$

$$S = k \log W$$



Werner Heisenberg
(1901-1976)

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$



Albert Einstein
(1879-1955)

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

leggi di stato

principi di simmetria

*simmetrie
spazio-temporali*

*simmetrie
di gauge*

*leggi di
conservazione*
energia
quantità di moto
momento angolare
carica elettrica
...



Erwin Schrödinger
(1887-1961)

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$$

leggi di evoluzione

Paul Dirac
(1902-1984)

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$$

Abdus Salam
(1926-1996)

Sheldon Lee Glashow
(1932-in vita)

Steven Weinberg
(1933-in vita)



$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\bar{\psi} \not{D} \psi + \text{h.c.} + \psi_i y_{ij} \psi_j \Phi + \text{h.c.} + |D_\mu \Phi|^2 - V(\Phi)$$

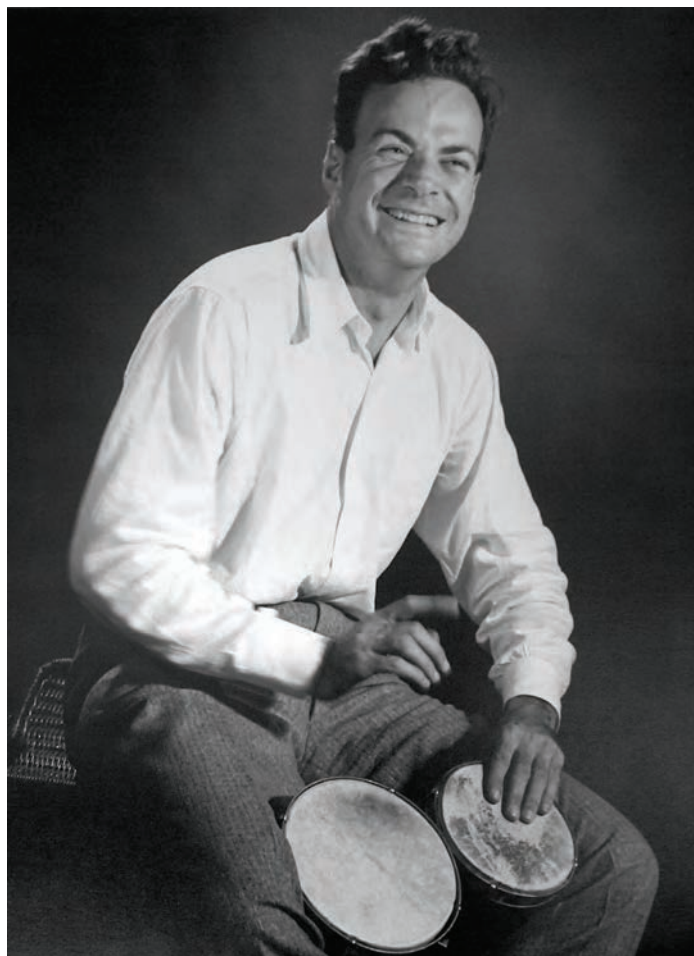
*stato
finale*

Già le ricerche di Michael Faraday, Georg Ohm, André-Marie Ampère e molti altri avevano provveduto a rimpolpare la fenomenologia dell'elettromagnetismo, ma fu Maxwell a scrivere le equazioni definitive del campo elettrico e del campo magnetico (vd. p. 12). In particolare, egli capì che l'aggiunta di un termine correttivo (la cosiddetta *corrente di spostamento*, consistente nella variazione temporale del campo elettrico) alla legge di Ampère garantiva la conservazione della carica elettrica e generava l'equazione delle onde.

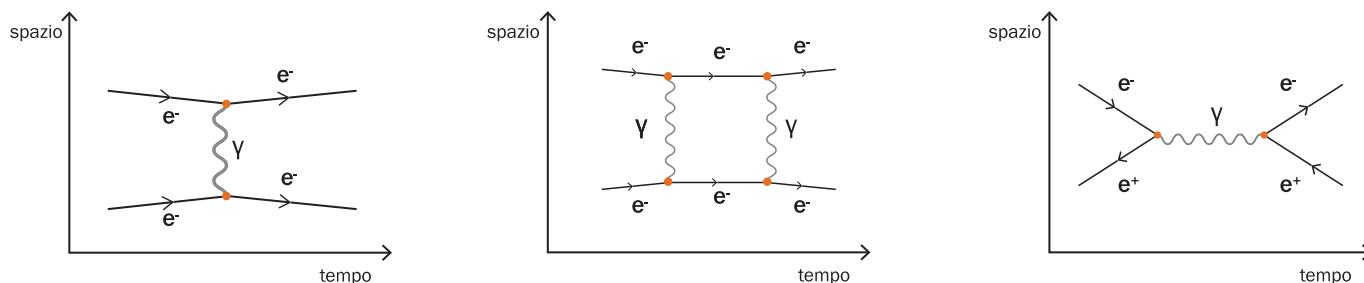
Il miracolo delle equazioni di Maxwell sta nel fatto che esse contengono i presupposti della relatività di Einstein, perché, a differenza delle equazioni della meccanica newtoniana, godono della *simmetria relativistica*, cioè sono invarianti rispetto alle trasformazioni di Lorentz dei sistemi di riferimento. Ciò può essere reso evidente introducendo un oggetto matematico chiamato *tensore* (una generalizzazione dei vettori ordinari), che incorpora il campo elettrico e il campo magnetico. Scritte in termini di tensori, le equazioni di Maxwell assumono una forma particolarmente compatta e soprattutto simmetrica a colpo d'occhio.

Dopo la fisica newtoniana dei corpuscoli e delle forze a distanza e la fisica maxwelliana dei campi, nella seconda metà del '900 si realizza la grande sintesi: le particelle e le forze sono entrambe descritte da campi *quantizzati*. Nasce l'*elettrodinamica quantistica* (Qed), la teoria degli elettroni e dei fotoni. Uno dei

protagonisti di questa svolta è Richard Feynman, il quale pubblica nel 1948 un lavoro che produrrà una sorta di insospettabile riconciliazione tra il vecchio e il nuovo: una riformulazione della teoria quantistica diversa da quella di Werner Heisenberg e da quella di Erwin Schrödinger, e basata su un principio della meccanica classica, il *principio di minima azione*. Questo principio stabilisce che la traiettoria di un corpo è quella che rende minima una quantità chiamata *azione*, che possiamo immaginare – semplificando un po' – come il prodotto dell'energia del corpo per la durata del moto. Nella meccanica classica, il principio di minima azione permette di derivare l'equazione del moto di un corpo, una volta che siano note le sue interazioni. Feynman mostra che in meccanica quantistica la probabilità che una particella si “propaghi” da un punto a un altro dello spaziotempo si può calcolare sommando tutti i possibili cammini della particella tra i due punti, con un opportuno peso per ogni cammino, dipendente dall'azione. Questo approccio, applicato alla teoria quantistica dei campi, condusse a una specie di “fisica a fumetti”, ovvero a una rappresentazione dei processi elementari e delle loro equazioni mediante figure, chiamate *diagrammi di Feynman*, che interpretano tali processi ordinandoli secondo un numero crescente di *mediatori* dell'interazione (nel caso della elettrodinamica quantistica, i fotoni, cioè le particelle della luce, vd. anche p. 13, ndr).



c.
Un giovane e brillante Richard Feynman, famoso anche per la sua passione per i bonghi.



In fig. d (a sinistra e al centro) è rappresentato l'urto di due elettroni con scambio di un fotone e di due fotoni. Si tratta in entrambi i casi di *fotoni virtuali*, cioè di fotoni che vivono per un brevissimo intervallo di tempo (vd. anche p. 21, ndr). La fig. d (a destra) mostra invece il diagramma dell'annichilazione elettrone-positrone in cui si produce un fotone virtuale, che si materializza poi in altre coppie di particelle cariche (ancora un elettrone e un positrone, oppure un muone positivo e un muone negativo, o altre particelle più pesanti, a seconda dell'energia disponibile). L'intensità dell'interazione elettromagnetica è espressa da una costante chiamata α (la *costante di struttura fine*, vd. anche in Asimmetrie n. 17 p. 19, ndr). Ogni diagramma di Feynman corrisponde a un'equazione proporzionale a una potenza di α , il cui esponente è dato dalla metà del numero di punti di interazione contenuti nel diagramma (i due diagrammi in fig. d sono quindi, rispettivamente, di ordine α e di ordine α^2). Per calcolare esattamente un processo reale, bisognerebbe sommare un numero infinito di diagrammi. Fortunatamente, la piccolezza di α (che è un numero inferiore a 0,01) fa sì che i pochi diagrammi degli ordini più bassi diano già un'ottima approssimazione. L'elettrodinamica quantistica è attualmente la teoria fisica più precisa: le sue predizioni si accordano con i dati sperimentali fino alla nona cifra significativa (cioè con un errore inferiore a una parte su un miliardo). Per conseguire questi successi, però, la teoria quantistica dei campi ha dovuto sconfiggere un nemico: l'infinito. Appena si considerano

diagrammi che descrivono un dato processo oltre l'ordine più basso in α , infatti, le equazioni danno valori infiniti. Il problema, in un certo senso, era presente già in fisica classica: l'energia potenziale dovuta al campo elettrico generato da un elettrone cresce man mano che ci si avvicina alla sorgente e diventa infinita nel punto in cui si trova l'elettrone stesso, che è una particella puntiforme. Nell'ambito della teoria quantistica dei campi, il problema è che il *vuoto quantistico* non è "vuoto", ma pullula di fotoni e di cariche prodotte in coppie, complessivamente neutre, di elettroni e positroni, virtuali (cioè effimeri), che vengono prodotti e riassorbiti dall'elettrone originario e producono guai alla teoria. Ma un complesso sistema di "trucchi", la cosiddetta *rinormalizzazione*, basata sulla ridefinizione dei campi e dei parametri della teoria, e ideata da Feynman, assieme a Julian Schwinger e Sin-Itiro Tomonaga, negli anni '40 del secolo scorso, permette di cancellare gli infiniti. L'esito finale è quella straordinaria capacità predittiva dell'elettrodinamica quantistica di cui abbiamo parlato. Negli anni '70, gli olandesi Gerardus 't Hooft e Martinus Veltman hanno dimostrato che la rinormalizzazione funziona anche con le teorie che descrivono le altre forze fondamentali del mondo subnucleare, quelle che compongono il *modello standard* (vd. p. 26). La storia delle leggi e delle equazioni, e dello sforzo dei fisici per calcolare il mondo, ha raggiunto così il suo temporaneo epilogo. Ci saranno sicuramente altri capitoli, ma per il momento sono ancora in bozze.

d.
A sinistra, il diagramma di Feynman che rappresenta l'urto di due elettroni, in cui si scambia solo un fotone. Le linee e^- rappresentano i due elettroni, la linea ondulata tra le due è il fotone mediatore che trasferisce energia e impulso da un elettrone all'altro. Al centro, l'urto di due elettroni con lo scambio di due fotoni. A destra, il diagramma di Feynman dell'annichilazione elettrone-positrone in un fotone virtuale. Le linee dei positroni puntano indietro nel tempo.

Biografia

Carlo Bernardini è professore emerito dell'Università Sapienza di Roma. Dopo la laurea, nel 1952, ha lavorato con Enrico Persico e Giorgio Salvini all'elettrosincrotrone da 1000 MeV dei Laboratori di Frascati dell'Infn. Nel 1960 con Bruno Touschek e altri ha dato l'avvio agli Anelli di Accumulazione materia-antimateria (Ada e Adone). È molto attivo nell'ambito della formazione degli insegnanti e della storia della fisica contemporanea. È autore di numerosi libri specialistici e divulgativi, tra i quali "Che cos'è una legge fisica" (Editori Riuniti, 1985).